

ΧΟΝΔΡΟΣ

Σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι μία σύντομη περιγραφή των μέχρι και σήμερα διαδεδομένων τρόπων μοντελοποίησης της μηχανικής συμπεριφοράς του χόνδρου καθώς και μία ανασκόπηση των εξελίξεων που σημειώθηκαν τα τελευταία χρόνια πάνω σε αυτό το πεδίο.

Δομή του Χόνδρου:

Ο χόνδρος αποτελείται κυρίως από 20% ίνες κολλαγόνου (collagen), 5% πρωτεογλυκάνες (PGs) και 75% νερό. Επιπλέον, μέσα σε αυτό το μείγμα βρίσκονται διασκορπισμένα χονδροκύτταρα.

Στην επιφάνεια του χόνδρου, οι ίνες κολλαγόνου έχουν προσανατολισμό παράλληλο με την επιφάνεια και βρίσκονται σε μεγάλη συγκέντρωση, σε αντίθεση με την συγκέντρωση των πρωτεογλυκάνων και των χονδροκυττάρων. Λόγω του πυκνού “πλεξίματος” των ινών κολλαγόνου στις παράλληλες διευθύνσεις ως προς την επιφάνεια του χόνδρου, η διαπερατότητα του πλέγματος σε αυτή την περιοχή είναι χαμηλή, εμποδίζοντας την κίνηση του νερού και παγιδεύοντας το εντός του χόνδρου.

Στα σύνορα οστού-χόνδρου, οι ίνες κολλαγόνου έχουν προσανατολισμό κάθετο με την επιφάνεια του συνόρου. Τα ποσοστά κολλαγόνου και χονδροκυττάρων σε αυτή την περιοχή είναι υψηλά, ενώ η συγκέντρωση των πρωτεογλυκάνων χαμηλή.

Στην ενδιάμεση περιοχή, οι πρωτεογλυκάνες βρίσκονται σε αφθονία, ενώ οι ίνες κολλαγόνου σε εκείνη την περιοχή έχουν κάπως απροσδιόριστο προσανατολισμό λόγω της αλλαγής της διεύθυνσης των ινών από παράλληλες σε κάθετες. Οι πρωτεογλυκάνες, οι οποίες αποτελούνται από αρνητικά φορτισμένες γλυκό-αμινο-γλυκάνες (GAGs), συμβάλουν επίσης στην συγκράτηση του νερού εντός του χόνδρου λόγω του αρνητικού τους φορτίου.

Συμπεριφορά:

Ο χόνδρος παρουσιάζει μηχανική συμπεριφορά η οποία εμφανίζει έντονη εξάρτηση από τον χρόνο. Όσο μεγαλώνει η ταχύτητα επιβολής του ασκούμενου φορτίου ή των εφαρμοζόμενων παραμορφώσεων, τόσο πιο έντονη είναι η δυναμική συμπεριφορά του, η οποία χαρακτηρίζεται κυρίως από φαινόμενα χαλάρωσης. Αξίζει να σημειωθεί, πως για μεγάλες ταχύτητες φορτίσεως, δεν είναι πλήρως γνωστοί οι μηχανισμοί που συμβάλλουν στην μηχανική του, με αποτέλεσμα ακόμα και τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται μέχρι και τώρα και που λαμβάνουν υπόψη την ιξώδη συμπεριφορά του να μην δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση φόρτισης.

Συνήθως, η συμπεριφορά του χόνδρου μελετάται για τις απλές περιπτώσεις ελεύθερης συμπίεσης (unconfined compression), περιορισμένης συμπίεσης (confined compression), ή φόρτισης με έμβολο μικρότερης διαμέτρου από αυτής του χόνδρου (indentation).

Μοντελοποίηση:

Από τα παραπάνω, γίνεται αντιληπτό πως λόγω της έντονης ανομοιογένειας του χόνδρου, εμφανίζονται πολλές δυσκολίες κατά την μοντελοποίηση του. Αναζητούνται τόσο αναλυτικές λύσεις της συμπεριφοράς του χόνδρου όσο και ολοένα πιο βελτιωμένα μοντέλα για χρήση με αριθμητικές μεθόδους όπως είναι τα πεπερασμένα στοιχεία.

Ο λόγος είναι πως τα πιο απλά αναλυτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του χόνδρου, μπορούν να λυθούν αναλυτικά κάνοντας πολλές και σημαντικές παραδοχές, οι οποίες οδηγούν σε λύσεις που προσεγγίζουν χονδρικά την πραγματική συμπεριφορά του και μπορούν να

μας δώσουν πιο ποιοτικές πληροφορίες σχετικά με αυτή. Όσο μεγαλύτερη είναι η ανάγκη ακριβούς προσδιορισμού των ιδιοτήτων και της συμπεριφοράς του χόνδρου στο εσωτερικό του, τόσο πιο σύνθετα γίνονται τα αναλυτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των φαινομένων που τον χαρακτηρίζουν, τα οποία λύνονται πλέον αριθμητικά.

Ισότροπο Ελαστικό Υλικό:

Όταν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του χόνδρου στην κατάσταση ισορροπίας, δηλαδή για αρκετό χρόνο μετά την επιβολή ενός απότομου φορτίου ή κατά την εφαρμογή μιας αργής φόρτισης, ο χόνδρος μπορεί να θεωρηθεί πως συμπεριφέρεται σαν ισότροπο ελαστικό υλικό. Το παραπάνω μοντέλο αδυνατεί να προβλέψει την έντονη χαλάρωση που παρουσιάζεται στην πραγματικότητα και δεν χρησιμοποιείται παρά μόνο σε αυτές τις απλές περιπτώσεις.

Διφασικό Υλικό:

Το συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιείται κατά κόρον όταν θέλουμε να προβλέψουμε την χρονική απόκριση του χόνδρου σε γρήγορα εφαρμοσμένες δυνάμεις και παραμορφώσεις. Βάσει αυτού του μοντέλου, ο χόνδρος μελετάται ως υλικό το οποίο αποτελείται από μία στερεή (δείκτης s) και μία υγρή (δείκτης f) φάση, οι οποίες συνυπάρχουν και συμβάλλουν ταυτόχρονα στην μηχανική συμπεριφορά του χόνδρου [1].

Κατά το μοντέλο αυτό, οι συνολικές τάσεις που επενεργούν στον χόνδρο χωρίζονται σε τάσεις που ασκούνται από/προς την στερεά φάση και σε τάσεις που ασκούνται από/προς την υγρή φάση:

$$\begin{aligned}\sigma_{total} &= \sigma_s + \sigma_f \\ \sigma_s &= -\varphi_s \cdot p \cdot \mathbf{I} + \lambda_s \cdot \text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{I} + 2 \cdot \mu_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \sigma_f &= -\varphi_f \cdot p \cdot \mathbf{I}\end{aligned}$$

όπου $\sigma_{total}, \sigma_s, \sigma_f$ οι τάσεις του χόνδρου, της στερεής και της υγρής φάσης αντίστοιχα, φ_s, φ_f τα ποσοστά του όγκου της στερεής και της υγρής φάσης αντίστοιχα, $\boldsymbol{\varepsilon}_s, \lambda_s, \mu_s$ οι παραμορφώσεις και οι σταθερές Lamé του υλικού και p η υδροστατική πίεση που επικρατεί στον χόνδρο.

Οι εξισώσεις που διέπουν το παραπάνω φαινόμενο είναι οι εξισώσεις συνέχειας

$$\nabla \cdot (\varphi_s \cdot \mathbf{v}_s + \varphi_f \cdot \mathbf{v}_f) = 0$$

οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\pi}_s &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\pi}_f &= 0\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\pi}_s = -\boldsymbol{\pi}_f = \frac{\varphi_f^2}{k} \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$$

όπου $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f$ οι ταχύτητες κίνησης της στερεής και υγρής φάσης αντίστοιχα και k η διαπερατότητα (permeability) της στερεής φάσης.

Μία σημαντική παρατήρηση είναι πως οι διάφορες σταθερές του μέσου, όπως το aggregate modulus H_A και η διαπερατότητα, εξαρτώνται σημαντικά από το βάθος σε σχέση με την επιφάνεια, λόγω της έντονης ανομοιογένειας του χόνδρου κατά αυτή την διεύθυνση. Χαρακτηριστικά αναφέρεται πως ενδεικτικές τιμές που λαμβάνει το H_A , μετρούμενο σε επίπεδα ίσων αποστάσεων από την επιφάνεια προς το οστό, είναι 0.079 MPa, 0.10 MPa, 0.17 MPa, 0.27 MPa και 0.55 MPa στα πρώτα 5 επίπεδα, μεταξύ 0.58 MPa και 0.73 MPa στα επίπεδα 6 έως 8, και 1.14 MPa στο ένατο επίπεδο [2].

Αναλυτικές λύσεις των παραμορφώσεων του χόνδρου για απλές περιπτώσεις φόρτισης, όπως αξονοσυμμετρικού δοκιμίου σε περιορισμένη συμπίεση, έχουν βρεθεί θεωρώντας ομοιογενές, από άποψης παραμέτρων, υλικό, μια παραδοχή, που όμως φαίνεται παραπάνω, δεν συμβαδίζει με τη πραγματικότητα.

Γενική Αναλυτική Λύση για Αξονοσυμμετρική Φόρτιση:

Η αναλυτική λύση του παραπάνω μοντέλου λαμβάνοντας την γεωμετρία του χόνδρου σαν σώμα εκ περιστροφής βρέθηκε πρόσφατα για την περίπτωση αξονοσυμμετρικής επαφής δύο χόνδρων [3]. Η χρησιμότητα αυτής της λύσης βρίσκεται στο ότι μπορούμε να βγάλουμε καλύτερες εκτιμήσεις της κατανομής των φορτίσεων που ασκούνται μεταξύ δύο χόνδρων, το οποίο πέρα από όλα τα άλλα είναι κάτι που κάλλιστα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για πιο ακριβή και εύκολη εφαρμογή οριακών συνθηκών σε πολύ πιο σύνθετα μοντέλα.

Λόγω της αξονοσυμμετρίας του προβλήματος, συμβολίζοντας με r, φ, z την ακτινική απόσταση, την γωνία και το βάθος από το σημείο επαφής των δύο χόνδρων αντίστοιχα, οι επιφάνειες των δύο χόνδρων χαρακτηρίζονται από τις γενικές (μη-πεπλεγμένες) εξισώσεις

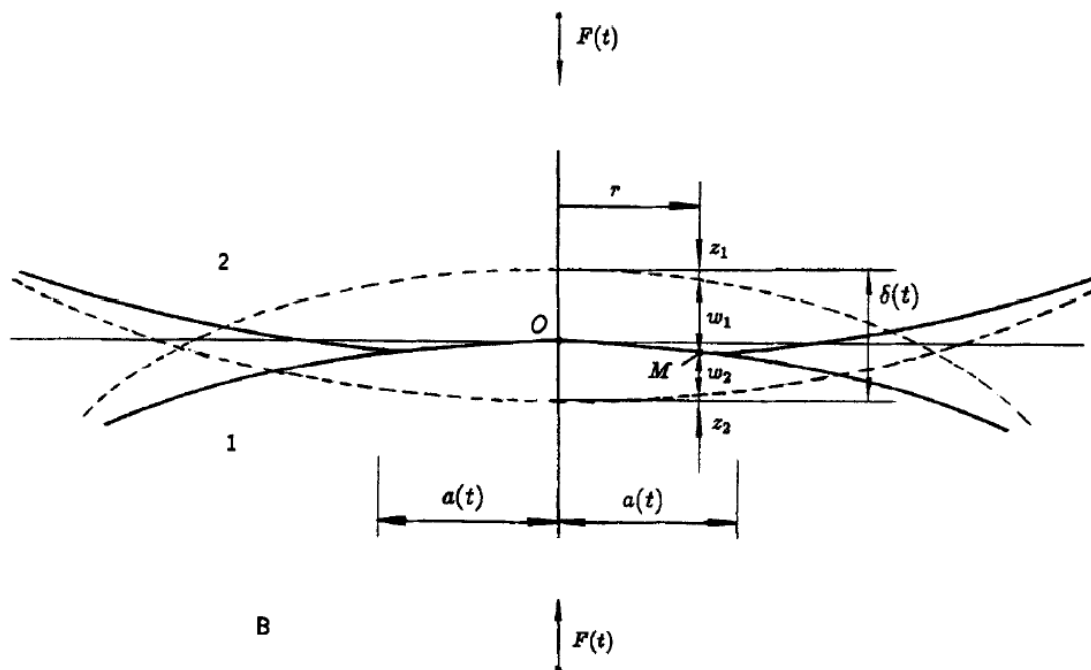
$$z = (-1)^n \cdot \Phi_n(r), \quad \forall n \in \{1, 2\}$$

Συμβολίζοντας την κατακόρυφη απόσταση των δύο οστών με $-\delta_0(t)$, τις κατακόρυφες παραμορφώσεις των χόνδρων με $w_n(r, t)$, $\forall n \in \{1, 2\}$, και την ακτίνα του δίσκου επαφής των δύο χόνδρων με $a(t)$, η συνθήκη επαφής χωρίς να εισχωρεί ο ένας χόνδρος εντός του άλλου μπορεί να διατυπωθεί ως:

$$\delta_0(t) - (w_1(r, t) + w_2(r, t)) \leq \Phi(r), \quad r > a(t)$$

$$w_1(r, t) + w_2(r, t) = \delta_0(t) - \Phi(r), \quad r \leq a(t)$$

$$\Phi(r) = \Phi_1(r) + \Phi_2(r)$$



Στην περίπτωση των αξονοσυμμετρικών προβλημάτων, η κατακόρυφες παραμορφώσεις στην επιφάνεια του χόνδρου συνδέονται με την ασκούμενη κατανομή φορτίου $P(r, t)$ μέσω της σχέσης:

$$w_n(r, t) = \mu_{sn}^{-1} \cdot h_n^3 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \cdot \partial P(r, t)}{\partial r} \right) \right) + \frac{\mu_{sn} \cdot k_n}{h_n^2} \cdot \int_0^t \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \cdot \partial P(r, \tau)}{\partial r} \right) \cdot d\tau, \quad \forall n \in \{1, 2\}$$

όπου μ_{sn}, h_n, k_n το μέτρο διάτμησης, το πάχος και η διαπερατότητα των χόνδρων αντίστοιχα.

Όσον αφορά την κατανομή του φορτίου, εξαιτίας της φύσης του προβλήματος αναμένεται να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$P(r, t) \geq 0, \quad r \leq a(t)$$

$$P(a(t), t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(P(r, t)) = 0, \quad r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(P(r, t)) = 0, \quad r = a(t)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\delta_0(t) = \frac{2}{a^2(t)} \cdot \int_0^a (t) \Phi(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$\frac{\pi \cdot m}{4} \cdot \int_0^a (t) \Phi(\rho) \cdot \rho \cdot (2 \cdot \rho^2 - a^2(t)) \cdot d\rho = F(t) + \chi \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot d\tau$$

$$P(r, t) = \frac{m}{4} \cdot K^{-1}(\delta_0(t) \cdot (a^2(t) - r^2)) + m \cdot K^{-1}\left(\int_0^r \Phi(\rho) \cdot \rho \cdot \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) \cdot d\rho - \int_0^a (t) \Phi(\rho) \cdot \rho \cdot \ln\left(a \frac{(t)}{\rho}\right) \cdot d\rho\right)$$

όπου $F(t)$ η εφαρμοζόμενη συνισταμένη δύναμη στον χόνδρο, χ, m σταθερές ίσες με:

$$\chi = \frac{3 \cdot \mu_{sl} \cdot k_1}{h_1^2} + \frac{3 \cdot \mu_{s2} \cdot k_2}{h_2^2}$$

$$m = \frac{1}{\frac{h_1^3}{3 \cdot \mu_{sl}} + \frac{h_2^3}{3 \cdot \mu_{s2}}}$$

$$\text{και } K^{-1}(x(t)) = x(t) - \chi \cdot \int_0^t x(\tau) \cdot e^{-\chi \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \text{ τελεστής.}$$

Η ισχύς των παραπάνω εξισώσεων επαληθεύτηκε για την περίπτωση παραβολοειδούς εκ περιστροφής μέσω της ήδη υπάρχουσας γνωστής αναλυτικής λύσης.

Αναλυτική Λύση για Ελλειπτική Επαφή:

Για την περίπτωση ελλειπτικής επαφής μεταξύ δύο χόνδρων, η λύση του προβλήματος ακολουθεί περίπου την ίδια πορεία με αυτό για την αξονοσυμμετρική φόρτιση [4]. Το ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση είναι πως το εν λόγω πρόβλημα αντιμετωπίζεται πρακτικά στον τρισδιάστατο χώρο και όχι στο επίπεδο ή υπό τον περιορισμό της αξονοσυμμετρίας.

Συμβολίζοντας με x_1, x_2 της διευθύνσεις των αξόνων της ελλειπτικής επαφής και με z το βάθος, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$w_1(x_1, x_2, t) + w_2(x_1, x_2, t) = \delta_0(t) - \Phi(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \omega(t)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{2 \cdot R_1} + \frac{x_2^2}{2 \cdot R_2}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{22}}$$

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right)^2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right) \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$$

$$w_n(x_1, x_2, t) = \frac{h_n^3}{3 \cdot \mu_{sn}} \cdot (\Delta P(x_1, x_2, t) + \frac{3 \cdot \mu_{sn} \cdot k_n}{h_n^2} \cdot \int_0^t \Delta P(x_1, x_2, \tau) \cdot d\tau)$$

$$\Delta P(x_1, x_2, t) + \chi \cdot \int_0^t \Delta P(x_1, x_2, \tau) \cdot d\tau = m \cdot (\Phi(x_1, x_2) - \delta_0(t))$$

$$P(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial P}{\partial n}(x_1, x_2, t) = 0 \quad \forall \{x_1, x_2\} \in \partial \omega(t)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις οι συμβολισμοί είναι κοινοί με αυτούς για την αξονοσυμμετρική

φόρτιση. Επιπλέον, $\omega(t)$ είναι η περιοχή επαφής, R_{ij} είναι οι ακτίνες καμπυλότητας του χόνδρου i στην διεύθυνση j , α η γωνία που σχηματίζουν οι κύριοι άξονες καμπυλότητας και $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ τελεστής.

Συμβολίζοντας με s τον λόγο των ημιαξόνων $a(t), b(t)$ της έλλειψης, βάσει της θεωρίας του Hertz για ελλειπτική επαφή, προκύπτουν οι παρακάτω λύσεις για το εν λόγω πρόβλημα, και επιλέγοντας τους συμβολισμούς έτσι ώστε $a(t) \geq b(t), R_1 \geq R_2$:

$$s = \sqrt{\frac{(R_1 - R_2)^2}{6 \cdot R_1} + \frac{R_2}{R_1} - \frac{(R_1 - R_2)}{6 \cdot R_1}}, \quad R = \frac{2 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$a(t) = \frac{1}{M_a(s)} \cdot \left(\frac{96}{\pi \cdot m} \cdot R \right)^{1/6} \cdot \left(F(t) + \chi \cdot \int_0^t F(\tau) \cdot d\tau \right)^{1/6}$$

$$\delta_0(t) = \frac{1}{2 \cdot R} \cdot M_\delta(s) \cdot a^2(t)$$

$$p_0(t) = \frac{m}{32 \cdot R} \cdot M_p(s) \cdot a^4(t)$$

$$P(x_1, x_2, t) = \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2(t)} - \frac{x_2^2}{s^2 \cdot a^2(t)} \right)^2 \cdot p_0(t) - \chi \cdot \int_{t_*(x_1, x_2)}^t \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2(\tau)} - \frac{x_2^2}{s^2 \cdot a^2(\tau)} \right)^2 \cdot p_0(\tau) \cdot e^{-\chi \cdot (t - \tau)} \cdot d\tau$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις:

$$M_a(s) = \left(\frac{8 \cdot s^5}{3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^2 + 3} \right)^{1/6}$$

$$M_\delta(s) = \frac{4 \cdot s^2 \cdot (s^2 + 1)}{3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^2 + 3}$$

$$M_p(s) = \frac{8 \cdot s^2}{3 \cdot s^4 + 2 \cdot s^2 + 3}$$

και $t_*(x_1, x_2)$ είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία το σύνορο $\partial \omega(t)$ διέρχεται από το σημείο (x_1, x_2) .

Συνδυασμός Διφασικού Μέσου και Ενσωματωμένων Ινών:

Ένας άλλος τρόπος μοντελοποίησης του χόνδρου, που εφαρμόζεται όλο και περισσότερο, είναι θεωρώντας τον χόνδρο σαν διφασικό μέσο στο οποίο συνυπάρχει ένα πλέγμα ορθότροπου υλικού. Με την εισαγωγή του ορθότροπου πλέγματος προσεγγίζεται καλύτερα η συμπεριφορά του πλέγματος ινών κολλαγόνου εντός του χόνδρου. Με αυτό τον τρόπο, λαμβάνεται ξεχωριστά υπόψη η συνεισφορά του κάθε μέσου στην μηχανική συμπεριφορά του χόνδρου. Το δυνατό σημείο αυτής της τεχνικής είναι η καλύτερη πρόβλεψη της συμπεριφοράς του υλικού συναρτήσει του βάθους και του χρόνου.

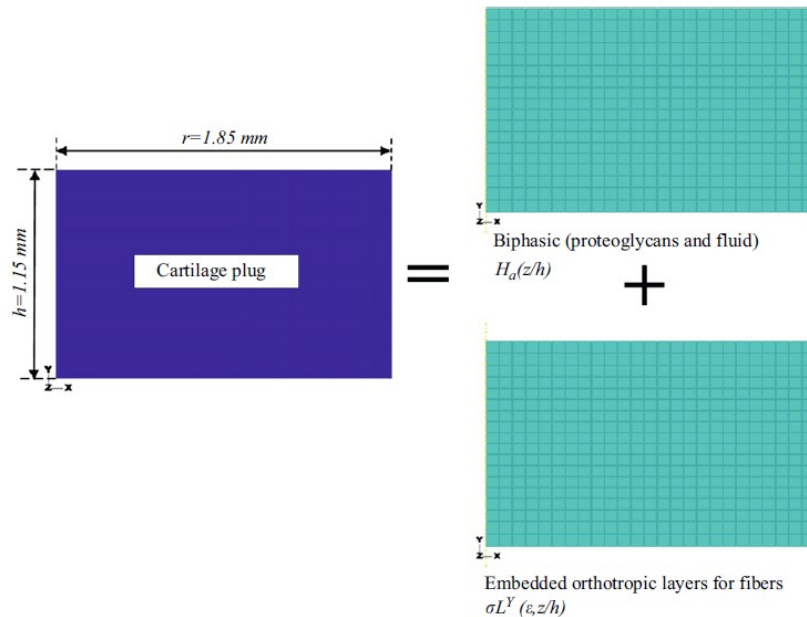
Μία πρόσφατη εργασία μου αντιμετωπίζει τον χόνδρο σαν τέτοιο μέσο, παρουσιάζει ενδιαφέροντα αποτελέσματα από άποψης σύγκρισης πειραματικών μετρήσεων και αποτελεσμάτων προσομοιώσεων με πεπερασμένα στοιχεία [2].

Κατά την μοντελοποίηση παραπάνω, η μεταβολή των ιδιοτήτων του διφασικού μέσου συναρτήσει του βάθους από την επιφάνεια του χόνδρου λήφθηκαν υπόψη στην λύση. Το aggregate modulus προσεγγίστηκε από πειραματικές τιμές που λαμβάνει σε διάφορα επίπεδα από την επιφάνεια του χόνδρου, η διαπερατότητα θεωρήθηκε πως υπακούει σε νόμο της μορφής

$k = k_0 \cdot e^{M \cdot \varepsilon}$, όπου k_0 η διαπερατότητα στην επιφάνεια, ε η παραμόρφωση του χόνδρου, και M σταθερά, και ο λόγος του όγκου υγρού λήφθηκε ίσος με $\phi_f = 0.9 - 0.2 \cdot (z/h)$ συναρτήσει του λόγου του βάθους z προς το πάχος h του χόνδρου. Όσον αφορά της ιδιότητες του ορθότροπου υλικού, αυτές θεωρήθηκαν ότι ακολουθούν έναν εκθετικό νόμο της μορφής

$\sigma = A \cdot (e^{B \cdot \varepsilon} - 1)$, όπου A, B σταθερές. Οι παραπάνω σταθερές προσδιορίστηκαν από

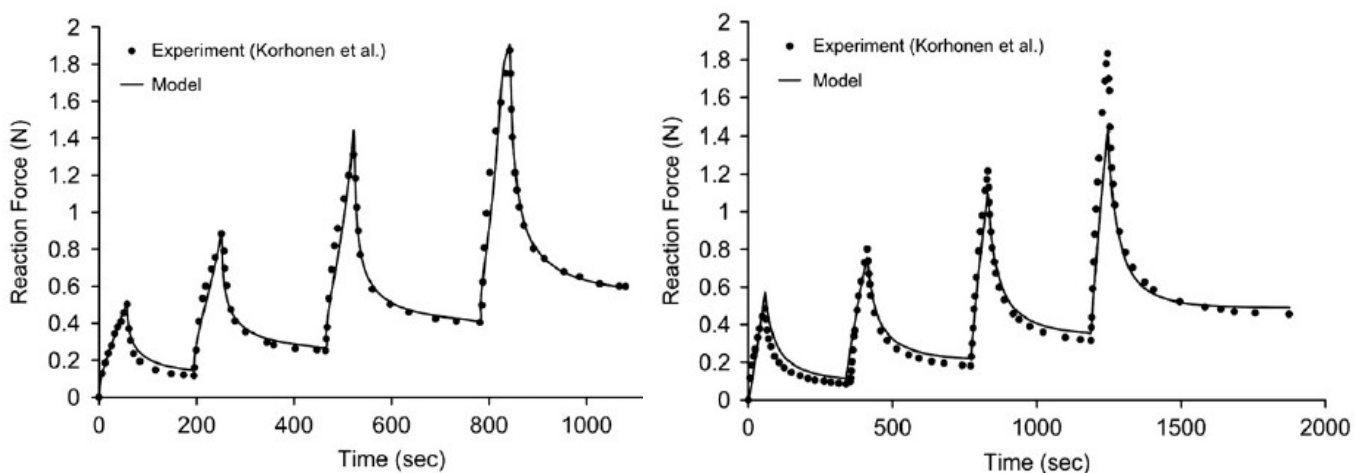
προσέγγιση πειραματικών δεδομένων για περιπτώσεις περιορισμένης συμπίεσης.



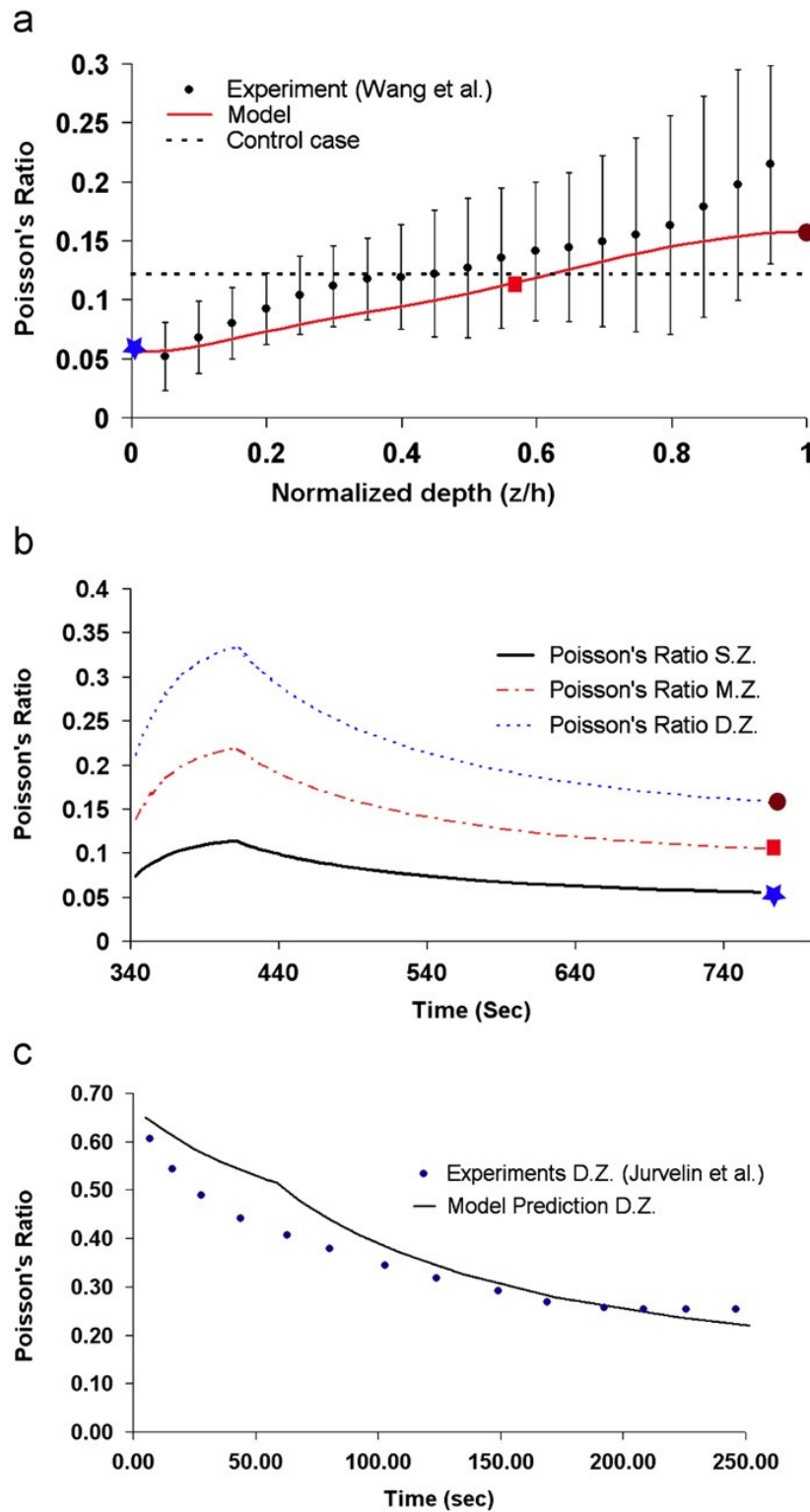
Από τα παραπάνω, κατασκευάστηκε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων το οποίο αποτελούταν από διφασικό μέσο με ενσωματωμένο ορθότροπο υλικό. Στην συνέχεια, έγινε προσομοίωση του μοντέλου για δεδομένη κυλινδρική γεωμετρία και δεδομένες μετατοπίσεις σε περιπτώσεις περιορισμένης και ελεύθερης συμπίεσης, οι οποίες ταυτίζονταν με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν σε πραγματικά πειράματα ίδιων κυλινδρικών δοκιμών. Συγκεκριμένα, οι διαστάσεις της κυλινδρικής γεωμετρίας ήταν $h=1.15\text{mm}$ και $d=3.7\text{mm}$, ενώ οι μετατοπίσεις που ασκήθηκαν ήταν βηματικές με παραμορφώσεις 5%, 10%, 15%, και 20% και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης.

Από τις προσομοιώσεις αυτές πάρθηκαν οι αντιδράσεις και ο λόγος Poisson που υπολογίστηκαν και συγκρίθηκαν με τις πειραματικές μετρήσεις.

Από την σύγκριση των φορτίων που φαίνεται στα παραπάνω δύο σχήματα μπορούμε να δούμε πως το μοντέλο αυτό μπορεί να προβλέψει με ικανοποιητικό τρόπο την συμπεριφορά του χόνδρου για την περίπτωση της περιορισμένης φόρτισης, ενώ για την περίπτωση της ελεύθερης φόρτισης, τα αποτελέσματα του μοντέλου αρχίζουν να αποκλίνουν από τα πειραματικά όσο μεγαλώνει η εφαρμοζόμενη παραμόρφωση.



Σύγκριση αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις της περιορισμένης και ελεύθερης συμπίεσης



Σύγκριση του λόγου Poisson

Από την σύγκριση των τιμών του λόγου Poisson που φαίνεται σχήμα α, μπορεί να δει κανείς πως οι τιμές που Poisson που υπολογίστηκαν με το συγκεκριμένο μοντέλο για τις διάφορες τιμές του αδιάστατου βάθους μετά την χαλάρωση βρίσκονται εντός της περιοχής εμπιστοσύνης των πειραματικών μετρήσεων. Στο σχήμα β φαίνονται οι καμπύλες του λόγου Poisson που υπολογίστηκαν για την επιφανειακή, την μέση και την εσωτερική ζώνη του χόνδρου. Σε αυτές παρατηρεί κανείς την έντονη εξάρτηση της συγκεκριμένης ιδιότητας του υλικού από τον χρόνο και το βάθος. Τέλος, στο τελευταίο σχήμα, φαίνεται η καμπύλη του λόγου Poisson του μοντέλου κοντά στα σύνορα οστού-χόνδρου συναρτήσει του χρόνου μαζί με τις αντίστοιχα πειραματικές μετρήσεις,

στην οποία το σφάλμα δεν ξεπερνάει το 15%.

Από την παραπάνω εργασία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το συγκεκριμένο μοντέλο (διφασικό μέσο ενισχυμένο με ορθότροπο υλικό) στο οποίο η ανομοιογένεια των παραμέτρων μοντελοποίησης του υλικού λαμβάνεται υπόψη, προσεγγίζει αρκετά καλά την συμπεριφορά του χόνδρου σε ελεύθερη και περιορισμένη συμπίεση. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι οι παράμετροι του υλικού προσδιορίστηκαν εξαρχής από πειραματικά δεδομένα τα οποία συλλέχθηκαν από διάφορες πηγές και δεν βρέθηκαν επαναληπτικά μέσω κάποιας τεχνικής βελτιστοποίησης με βάση τα τελικά αποτελέσματα.

Μοντελοποίηση βάσει Θεωρίας Πολυμερών:

Η ιξωδοελαστική συμπεριφορά του χόνδρου, πέρα από μία αργή (λόγω της μικρής διαπερατότητας του χόνδρου) συνιστώσα που οφείλεται στην ροή του ρευστού διαμέσου του πλέγματος των ινών η οποία μοντελοποιήθηκε παραπάνω με την θεώρηση του διφασικού μέσου, αποτελείται και από μία γρήγορη συνιστώσα η οποία δεν εξαρτάται από την ροή του ρευστού και της οποίας τα αίτια δεν είναι ακόμα ξεκάθαρα. Μία εξήγηση της ανεξαρτήτως ροής ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς του χόνδρου είναι η χαλάρωση των πεπλεγμένων μακρομορίων εντός του χόνδρου, η οποία παρουσιάζεται στην παρακάτω εργασία [5].

Βάσει της θεωρίας των πολυμερών, στην απλή περίπτωση μόνο-δισπαρμένων (mono-disperse) (ίδιου μοριακού βάρους και γραμμικών ίδιου μήκους αλυσίδων) μακρομορίων, θεωρείται πως το κάθε μακρομόριο βρίσκεται αρχικά εντός ενός σωληνίσκου εντός του οποίου μπορεί να εκτελέσει κινήσεις παρόμοιες με αυτές της κίνησης ενός φιδιού, μία διαδικασία που λέγεται reptation. Κατά την διαδικασία αυτή, το μακρομόριο διαφεύγει του αρχικού σωληνίσκου μέσω διάχυσης, μία συμπεριφορά στην οποία οφείλεται και η παρατηρούμενη χαλάρωση του χόνδρου με την πάροδο του χρόνου μετά την επιβολή φορτίου. Σε αυτή την διαδικασία, το ποσοστό που παραμένει εντός του αρχικού σωληνίσκου συναρτήσει του χρόνου υπολογίζεται από την σχέση (η οποία είναι το ισοδύναμο της συνάρτησης χαλάρωσης)

$$\psi(t) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \sum_{p=1,3,5,\dots} e^{\frac{-p^2 \cdot t}{\tau_d}},$$

όπου τ_d χρονική σταθερά.



Στην περίπτωση ενός πολύ-δισπαρμένου (poly-disperse) συστήματος, όπως είναι αυτό του χόνδρου, τα μακρομόρια διαφέρουν μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση χαλάρωσης που οφείλεται στην διαδικασία του reptation υπακούει έναν νόμο της μορφής:

$$M(t) \approx B(t) \cdot e^{-(f \cdot t)^\beta},$$

όπου f είναι ένας μέσος ρυθμός χαλάρωσης και $\beta = \chi / (\chi + 1)$, $\chi > 0$ όπου χ είναι ο εκθέτης της κατανομής του βάρους των μακρομορίων. Για την περίπτωση της κατανομής των πολυμερών του χόνδρου, $\beta \in (0.25, 0.33)$.

Πέρα από την χαλάρωση λόγω reptation, ένα ακόμα φαινόμενο το οποίο συμβάλλει στην χαλάρωση είναι η ύπαρξη “κολλώδων” (sticky) εμποδίων στην κίνηση των μακρομορίων λόγω της ανάπτυξης δεσμών με τα γειτονικά τους μακρομόρια, κάτι που παρατηρείται έντονα λόγω των ινών κολλαγόνου και των πρωτεογλυκάνων. Μία απλή εκτίμηση της συνάρτησης χαλάρωσης που προσεγγίζει το συγκεκριμένο φαινόμενο είναι της ίδιας μορφής με την $M(t)$ για τιμή του $\beta=0.5$. Μία πιο ακριβής εκτίμηση της συνάρτησης χαλάρωσης, προκύπτει θεωρώντας πως ένα πολυμερές έχει N_T σημεία προσωρινών δεσμών, το κάθε ένα με πιθανότητα p να είναι αδέσμευτο και τοποθετημένα έτσι ώστε το μήκος των ελεύθερων τμημάτων της αλυσίδας να είναι L_m όταν m το πλήθος συνεχόμενα σημεία προσωρινών δεσμών είναι αδέσμευτα. Έστω, το αναμενόμενο πλήθος των ελεύθερων τμημάτων της αλυσίδας με μήκος L_m θα είναι N_m . Θεωρώντας πως η συνάρτηση χαλάρωσης για κάθε ελεύθερο τμήμα αλυσίδας είναι εκθετικής μορφής με χρονική σταθερά ανάλογη του μήκους του, η συνολική συνάρτηση χαλάρωσης παίρνει την μορφή:

$$\varphi(t) = \frac{(1-p)}{(1-p^{N_T}) \cdot p} \cdot \sum_{m=1}^{N_T} p^m \cdot e^{\frac{-a \cdot t}{L_m}}$$

Η παραπάνω σχέση, αν και αποτελεί πιο σύνθετη εξίσωση, μπορεί να προσεγγιστεί αρκετά καλά από μία συνάρτηση ίδιας μορφής με την $M(t)$ για $\beta \in (0.58, 0.69)$.

Όσον αφορά την προσέγγιση της συνιστώσας λόγω της ροής του ρευστού, για την ειδική περίπτωση αξονοσυμμετρικής μελέτης κυλινδρικού δοκιμίου, αυτή προσεγγίστηκε από μία συνάρτηση της μορφής:

$$\psi_{KLM}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(v) \cdot e^{-\left(\frac{a_n \cdot H_A \cdot k \cdot t}{r^2}\right)}$$

$$A_n(v) = \left(\frac{(1-v) \cdot (1-2 \cdot v)}{(1+v)} \right) \cdot \frac{1}{(1-v)^2 \cdot a_n^2 - (1-2 \cdot v)}$$

όπου v ο λόγος Poisson, H_A το aggregate modulus, k η διαπερατότητα του υλικού, και a_n οι λύσεις της εξίσωσης $J_1(x) - (1-v) \cdot x \cdot J_0(x) / (1-2 \cdot v) = 0$ με $J_0(x), J_1(x)$ τα πολυώνυμα Bessel.

Βάσει της παραπάνω θεωρίας, στην εν λόγω εργασία ως προσεγγίσεις των συναρτήσεων χαλάρωσης επιλέχθηκαν συναρτήσεις της μορφής:

$$\sigma(t) = S_0 \cdot \sum_{p=1,3,\dots} \frac{8}{p^2 \cdot \pi^2} \cdot e^{\frac{-p^2 \cdot t}{t_d}} + S_1, \text{ όπου } S_0, S_1, t_d : \text{σταθερές}$$

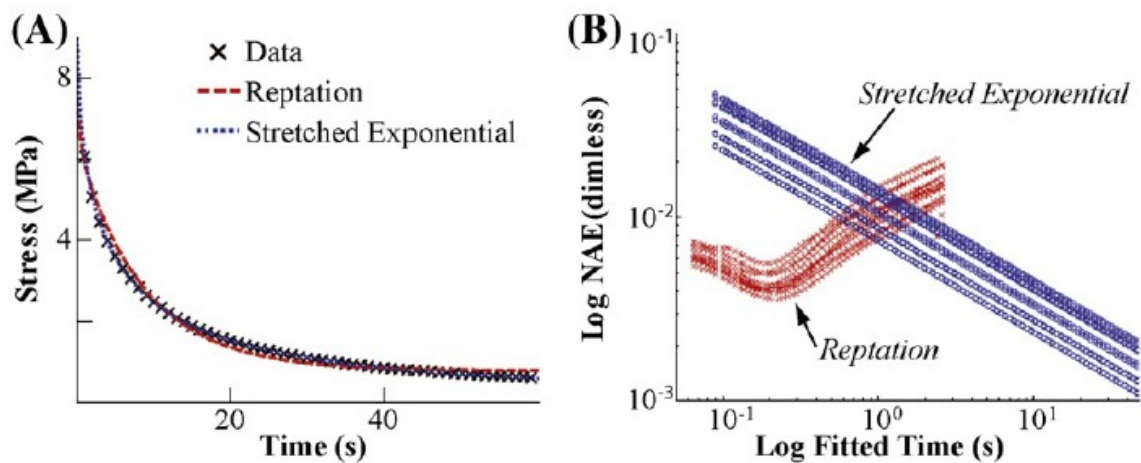
$$\sigma(t) = S_0 \cdot e^{-\left(t/t_{kww}\right)^\beta} + S_1, \text{ όπου } S_0, S_1, t_{kww} : \text{σταθερές}$$

$$\sigma = S_0 \cdot \frac{1-p}{p \cdot (1-p^{N_T})} \cdot \sum_{i=1}^{100} p^i \cdot e^{\frac{-t \cdot i \cdot I_0}{a}} + S_\infty$$

$$\sigma(t) = S_\infty \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(v) \cdot e^{-a_n \cdot B \cdot t} \right), \text{ όπου } S_\infty, v, B : \text{σταθερές}$$

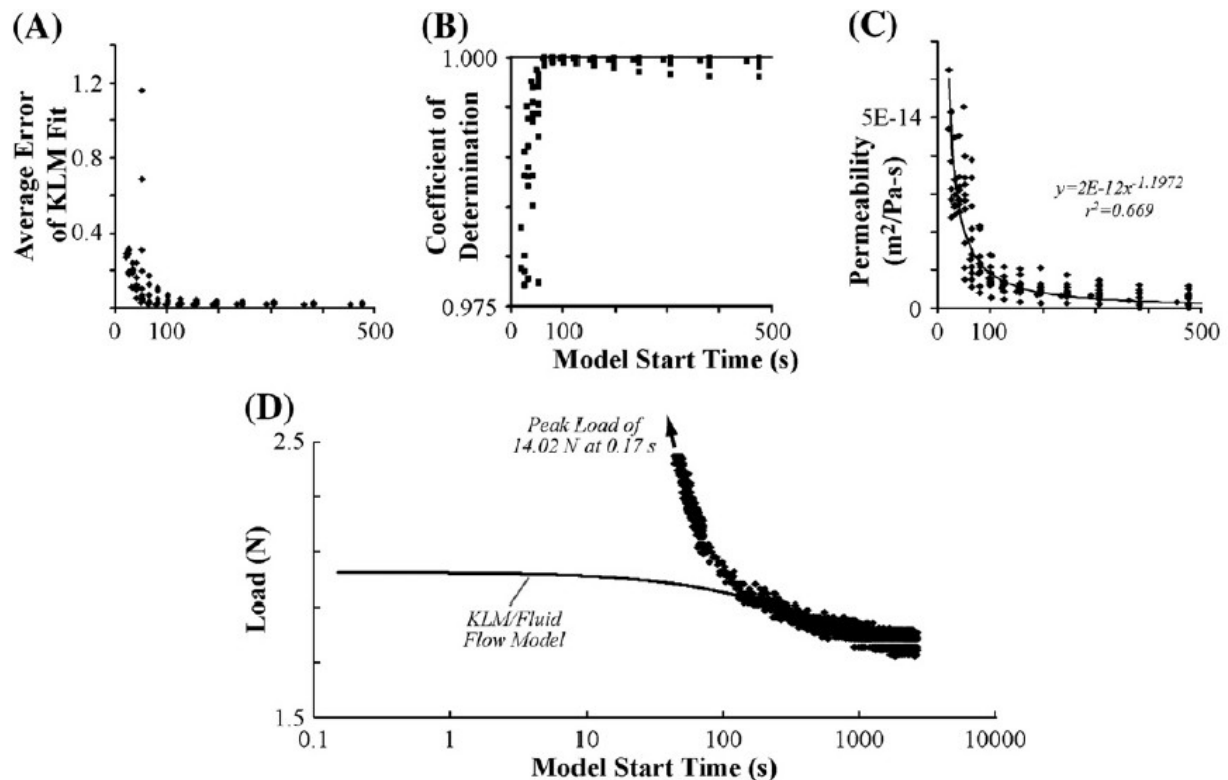
για τις περιπτώσεις χαλάρωσης λόγω reptation μονοδιάσπαρτου συστήματος πολυμερών, reptation πολυδιάσπαρτου συστήματος πολυμερών, κολλώδων εμποδίων και ροής αντίστοιχα.

Στην συνέχεια, για τον προσδιορισμό των παραπάνω σταθερών, έγινε προσέγγιση πειραματικών μετρήσεων στα παραπάνω μοντέλα.



Σύγκριση αποτελεσμάτων των δύο φαινομένων reptation για μονοδιάσπαρτου (αναφερόμενο μοντέλο ως reptation) και πολυδιάσπαρτου (αναφερόμενο μοντέλο ως stretched exponential)

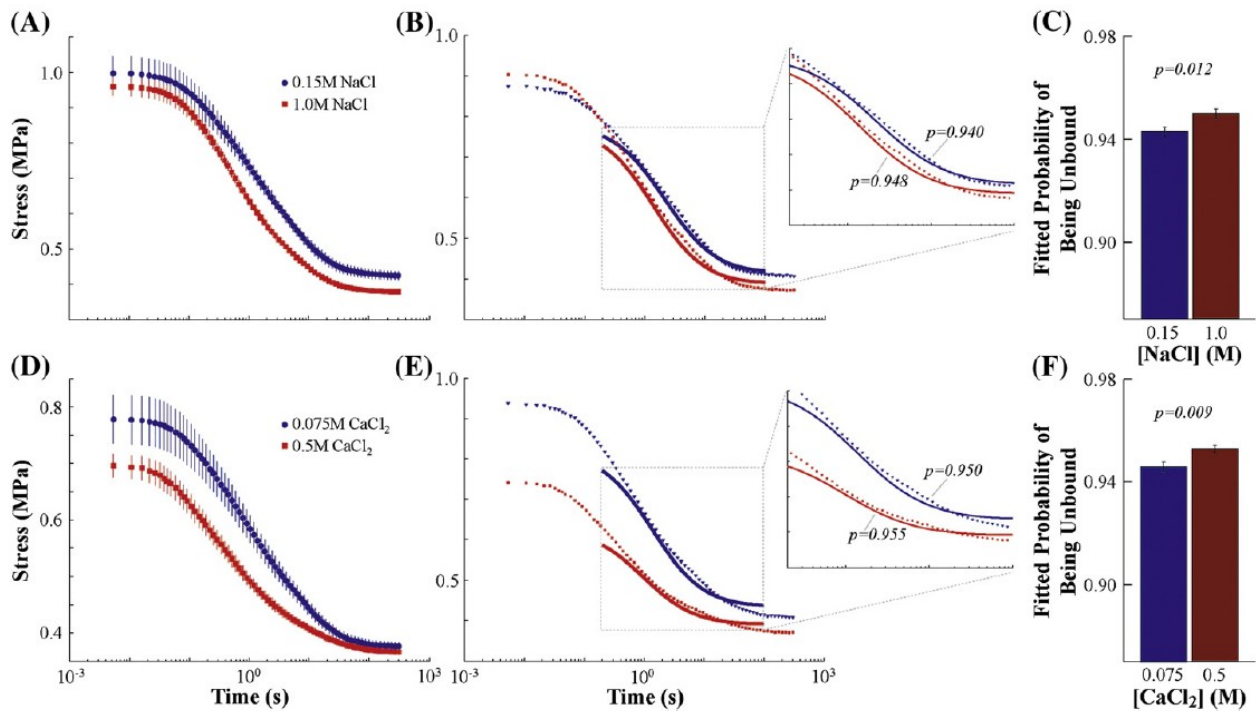
Από την προσέγγιση των δύο φαινομένων reptation για μονοδιάσπαρτου (αναφερόμενο μοντέλο ως reptation) και πολυδιάσπαρτου (αναφερόμενο μοντέλο ως stretched exponential) συστήματος πολυμερών σε πειραματικές μετρήσεις χαλάρωσης για χρόνους από 0s έως 60s, προέκυψαν καλές προσεγγίσεις και από τα δύο μοντέλα. Όμως, όπως γίνεται αντιληπτό και εποπτικά, το μοντέλο του πολυδιάσπαρτου συστήματος δίνει καλύτερα αποτελέσματα για αυτούς τους χρόνους χαλάρωσης μεταξύ των δύο.



Σύγκριση αποτελεσμάτων μοντέλου ροής με τις πειραματικές μετρήσεις

Η προσέγγιση του φαινομένου της χαλάρωσης λόγω της ροής ρευστού έγινε για πειραματικές μετρήσεις ταχείας φορτίσεως των χόνδρων και για χρόνους μέτρησης μέχρι και 1800s. Στα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να δούμε πρακτικά ότι το συγκεκριμένο μοντέλο, όπως και

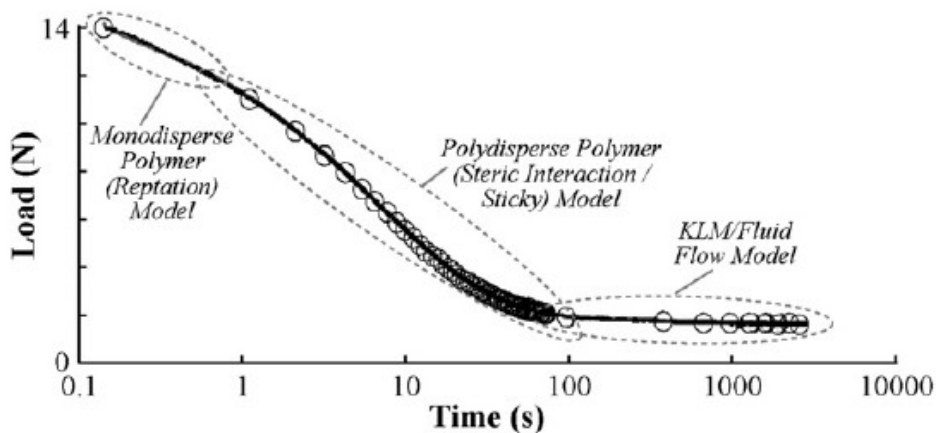
αναμενόταν, μπορεί να προβλέψει καλά την δυναμική απόκριση του χόνδρου μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα από την εφαρμογή του φορτίου. Είναι εμφανές ότι το συγκεκριμένο μοντέλο δίνει για τις συγκεκριμένες πειραματικές μετρήσεις καλά αποτελέσματα για τα χρονικά διαστήματα φόρτισης από 100s και έπειτα.



Αποτελέσματα μοντέλου “κολλώδων” εμποδίων

Όσον αφορά το μοντέλο των “κολλώδων” εμποδίων, από την μαθηματική μοντελοποίηση του φαίνεται πως η χαλάρωση που οφείλεται σε αυτό θα πραγματοποιηθεί ταχύτερα καθώς η πιθανότητα ανάπτυξης δεσμών μεταξύ των μακρομορίων μικραίνει, κάτι που αναμένεται να συμβαίνει σε διαλύματα υψηλής συγκέντρωσης σε ιόντα. Από τα παραπάνω διαγράμματα, μου έγιναν με δοκίμια για διαφορετικές συγκεντρώσεις ιόντων, μπορεί να δει κανείς, όπως και αναμενόταν, πως το συγκεκριμένο μοντέλο προσεγγίζει καλύτερα τις πειραματικές μετρήσεις για χρόνους μεταξύ 0s και 100s.

Ολοκληρώνοντας, με συνδυασμό των παραπάνω μοντέλων, το καθένα για την προσέγγιση της αντίστοιχης χρονικής φάσης, είναι δυνατόν να μοντελοποιηθεί η συμπεριφορά της απόκρισης του χόνδρου για τις περιπτώσεις απότομης φόρτισης, κάτι το οποίο η μοντελοποίηση του υλικού σαν διφασικό μέσω δεν μπορούσε να επιτύχει.



Βιβλιογραφία:

- [1]: "Biomechanics: Principles and Applications", Donald R. Peterson, Joseph D. Bronzino, CRC Press, 2008, ISBN: 13: 978-0-8493-8534-6
- [2]: "Time and depth dependent poisson's ratio of cartilage explained by an inhomogeneous orthotropic fiber embedded biphasic model", Salman Chegini, Stephen J. Ferguson, 4 March 2010
- [3]: "A general solution of the axisymmetric contact problem for biphasic cartilage layers", Ivan Argatov, 14 July 2010
- [4]: "Elliptical contact of thin biphasic cartilage layers: Exact solution for monotonic loading", I. Argatov, G. Mishuris, 4 November 2010
- [5]: "Polymer mechanics as a model for short-term and flow-independent cartilage viscoelasticity", R.K. June, C.P. Neu, J.R. Barone, D.P. Fyhrie, 30 November 2010

Βλαντής Παναγιώτης
2012-2013